9-1 质心 2021年3月23日15点34分

什么是物理？

每位被聘为法庭专家证人以重建交通事故的机械工程师都使用物理学。每个指导芭蕾舞演员如何跳跃的舞蹈教练都使用物理学。确实，分析任何种类的复杂运动都需要通过对物理学的理解来简化。在本章中，我们讨论如果确定系统的一个特殊点即该系统的质心，则可以简化诸如汽车或芭蕾舞演员之类的物体系统的复杂运动。这是一个简单的例子。如果您将球抛向空中而没有太多旋转（图9-1a），则它的运动很简单-它遵循抛物线路径，如我们在第4章中讨论的那样，并且可以将球视为粒子。相反，如果您将棒球棍向空中翻转（图9-1b），则其运动会更加复杂。由于蝙蝠的每个部分沿着许多不同形状的路径移动的方式都不同，因此您无法将蝙蝠表示为粒子。相反，它是一个粒子系统，每个粒子都沿着自己的路径通过空气。但是，蝙蝠有一个特殊的点-重心-确实沿简单的抛物线路径运动。蝙蝠的其他部分围绕重心移动。 （要找到重心，请将蝙蝠放在伸出的手指上；该点在手指上方，在蝙蝠的中心轴上。）

您不能从事将棒球棍扔向空中的职业，但是可以为跳远的运动员或舞者提供建议，以帮助他们如何在移动胳膊和腿或旋转躯干的同时正确地跳入空中。 您的出发点是确定人物的质心，因为它的动作简单。

质心

我们定义粒子系统（例如人）的质心（com），以预测系统的可能运动。

粒子系统的质心是一个点，就像（1）系统的所有质量都集中在此处，并且（2）所有外力都施加在此处。

在这里，我们讨论如何确定粒子系统的质心在哪里。 我们从只有几个粒子的系统开始，然后考虑由很多粒子（一个固体，例如棒球棒）组成的系统。 在本章的后面，我们将讨论当外力作用于系统时系统的质心如何运动。

两个粒子。 图9-2a显示了质量为m1和m2的两个粒子，它们之间的距离为d。 我们已任意选择x轴的原点与质量为m1的粒子重合。 我们将这两个粒子系统的质心（com）的位置定义为

例如，假设m2 =0。那么只有一个质量为m1的粒子，并且质心必须位于该粒子的位置；因此，质心必须位于该粒子的位置。 公式9-1忠实地减少到x com =0。如果m1 = 0，则又只有一个粒子（质量为m2），并且正如我们期望的那样，xcom = d。 如果m1 = m2，则质心应位于两个粒子之间的中间； 再次如我们所料，公式9-1降为xcom = 1 2d。 最后，公式9-1告诉我们，如果m1和m2都不为零，则xcom只能具有介于零和d之间的值；否则，xcom只能具有介于零和d之间的值。 也就是说，质心必须位于两个粒子之间的某个位置。 我们不需要将坐标系的原点放在其中一个粒子上。 图9-2b显示了一种更一般的情况，其中坐标系已向左移动。 现在定义了质心的位置

请注意，如果我们将x1 = 0，则x2变为d，公式9-2根据需要简化为公式9-1。 还要注意，尽管坐标系发生了变化，但质心距每个粒子的距离仍然相同。 com是物理粒子的属性，而不是我们碰巧使用的坐标系。

我们可以将公式9-2重写为

其中M是系统的总质量。 （在这里，M = m1 + m2。）

许多粒子。 我们可以将此方程式扩展到一个更一般的情况，其中n个粒子沿x轴射出。 则总质量为M = m1 + m2 +···+ mn，质心的位置为

下标i是具有从1到n的所有整数值的索引.

三个维度。 如果粒子以三个维度分布，则必须通过三个坐标来标识质心。 通过公式9-4的扩展，它们是

我们还可以使用向量的语言来定义质心。 首先回想一下，粒子在坐标xi，yi和zi处的位置由位置矢量给出（它从原点指向粒子）：

这里的索引标识粒子，particlei，ˆj和kˆ是分别指向x，y和z轴正方向的单位向量。 类似地，粒子系统质心的位置由位置矢量给出：

如果您喜欢简洁的表示法，现在可以将一个方程式9-5的三个标量方程式替换为一个矢量方程式，

其中，M再次是系统的总质量。 您可以通过代入方程式来检查该方程式是否正确。 9-6和9-7放入其中，然后分离出x，y和z分量。 得出公式9-5的标量关系。

固体

诸如棒球棒之类的普通物体包含如此多的粒子（原子），因此我们最好将其视为物质的连续分布。 然后，“粒子”成为微分质量元素dm，公式9-5的总和成为积分，并且质心的坐标定义为

其中，M现在是物体的质量。 积分有效地使我们可以对大量粒子使用公式9-5，否则这将需要很多年的时间。

对于大多数常见对象（例如电视机或驼鹿），要评估这些积分将很困难，因此在这里，我们仅考虑统一的对象。 这样的物体具有均匀的密度或单位体积的质量。 也就是说，对于物体的任何给定元素，对于整个物体而言，密度ρ（希腊字母rho）是相同的。 从公式1-8，我们可以写

其中dV是质量元素dm占据的体积，V是对象的总体积。 将公式9-10中的dm =（M / V）dV代入公式9-9中，得出

对称性是捷径。 如果对象具有点，线或对称平面，则可以绕过这些积分中的一个或多个。 然后，此类对象的质心位于该点，该直线或该平面中。 例如，均匀球体（具有对称点）的质心在球体中心（即对称点）。 均匀圆锥体（其轴是一条对称线）的质心位于圆锥体的轴上。 香蕉的质心（具有将其分成两个相等部分的对称平面）位于对称平面中的某个位置。 物体的质心不必位于物体内。 甜甜圈的组合没有面团，马蹄形的组合没有铁。

9-2 粒子系统的牛顿第二定律

现在我们知道了如何定位粒子系统的质心，我们将讨论外力如何移动质心。让我们从两个台球的简单系统开始。如果将母球滚动到静止的第二个台球，则您希望两球系统在撞击后将继续向前运动。例如，如果两个球都向您返回，或者两个球都向右或向左移动，您会感到惊讶。您已经有了直觉，认为事情会继续向前发展。继续前进的运动，其稳定的运动完全不受碰撞的影响，是两球系统的重心。如果您专注于这一点（由于它们的质量相同，它们总是位于它们之间的中间位置），那么您可以在台球桌上通过试验轻松地说服自己。无论碰撞是扫视，正面碰撞还是之间的碰撞，质心都会继续向前移动，就像从未发生过碰撞一样。让我们更详细地研究这种质心运动。

系统com的运动。 为此，我们用n个（可能）质量不同的粒子系统替换了这对台球。 我们对这些粒子的单个运动不感兴趣，而仅对系统质心的运动感兴趣。 尽管质心只是一个点，但它的运动就像质点等于系统总质量的粒子一样。 我们可以为其指定位置，速度和加速度。 我们声明（然后证明），控制这种粒子系统质心运动的矢量方程为

该方程式是牛顿关于粒子系统质心运动的第二定律。 请注意，其形式与单个粒子运动的方程式（→Fnet = ma→）相同。 但是，必须谨慎评估公式9-14中出现的三个量：

→Fnet是作用在系统上的所有外力的净力。 公式9-14中不包括来自系统另一部分的系统上的力（内部力）。

M是系统的总质量。 我们假设没有质量在运动时进入或离开系统，因此M保持恒定。 据说该系统已关闭。

→com是系统质心的加速度。 公式9-14没有提供有关系统任何其他点的加速度的信息。

公式9-14等效于三个方程，涉及三个坐标轴上的→F net和→acom的分量。 这些方程是

撞球。 现在我们可以回过头来检查台球的行为。 母球开始滚动后，没有净外力作用在（双球）系统上。 因此，由于→Fnet = 0，因此公式9-14告诉我们→acom = 0。 因为加速度是速度的变化率，所以我们得出结论，两个球的系统的质心的速度不变。 当两个球碰撞时，作用的力是内力，另一个球作用在另一个球上。 这样的力不会对净力→Fnet起作用，它仍然为零。 因此，在碰撞之前向前移动的系统的质心必须在碰撞之后以相同的速度和相同的方向继续向前移动。

固体。 公式9-14不仅适用于粒子系统，而且适用于固体，例如图9-1b的蝙蝠。 在这种情况下，公式9-14中的M是球棒的质量，而→Fnet是球棒上的重力。 然后，公式9-14告诉我们→a com = g→。 换句话说，蝙蝠的质心移动，就像蝙蝠是质量为M的单个粒子一样，作用力→Fg起作用。

爆炸机构。 图9-5显示了另一个有趣的情况。 假设在烟花汇演中，一枚火箭沿抛物线路径发射。 在某个时候，它会爆炸成碎片。 如果没有发生爆炸，火箭将沿着图中所示的轨迹继续前进。 爆炸的力是系统内部的（起初，系统只是火箭，然后是其碎片）； 也就是说，它们是系统其他部分上的力。 如果忽略空气阻力，则不管火箭是否爆炸，作用在系统上的净外力→Fnet就是系统上的重力。 因此，根据公式9-14，碎片（在飞行中）质心的加速度→a com等于→g。 这意味着碎片的质心遵循与抛物线相同的抛物线轨迹，如果火箭没有爆炸，它将遵循该抛物线轨迹。

芭蕾舞飞跃。 跳芭蕾舞者跳上大舞台越过舞台时，一旦脚离开舞台，她就会举起手臂并水平伸展双腿（图9-6）。 这些动作使她的质心通过她的身体向上移动。 尽管质量转移的中心忠实地遵循跨平台的抛物线路径，但其相对于身体的运动相对于正常跳跃而言，降低了其头部和躯干所达到的高度。 结果是头部和躯干遵循几乎水平的路径，给人一种舞者漂浮的幻觉。

证明公式9-14

现在让我们证明这个重要方程。 从公式9-8，对于n个粒子的系统，我们有

其中M是系统的总质量，而→rcom是定位系统质心位置的向量。

相对于时间微分方程9-16得出

这里→vi（= dr→i / dt）是第i个粒子的速度，而→vcom（= dr→com / dt）是质心的速度。

关于时间对方程9-17进行微分可得出

这里→ai（= dv→i / dt）是第i个粒子的加速度，而→acom（= dv→com / dt）是质心的加速度。 尽管质心只是一个几何点，但它具有位置，速度和加速度，就好像它是一个粒子一样。 根据牛顿第二定律，mi→ai等于作用在第i个粒子上的合力→Fi。 因此，我们可以将公式9-18重写为

在等式9-19右侧的作用力中，有系统粒子相互作用的力（内力）和从系统外部作用于颗粒的力（外力）。 根据牛顿第三定律，内力形成了第三定律对，并抵消了等式9-19右侧的总和。 剩下的就是作用在系统上的所有外力的矢量和。 然后，方程式9-19简化为方程式9-14，这是我们要证明的关系。

9-3 线性动量 2021年3月23日17点43分

线性动量

在这里，为了定义两个重要的数量，我们仅讨论一个粒子而不是一个粒子系统。 然后，我们将这些定义扩展到许多粒子的系统。 第一个定义涉及一个熟悉的词-动量-在日常语言中具有多种含义，但在物理学和工程学中仅具有一个精确的含义。 粒子的线性动量是矢量量→p，定义为

其中m是粒子的质量，而→v是粒子的速度。 （形容词线性经常被丢弃，但是它用来将→p与角动量区分开，这在第11章中介绍了并且与旋转相关。）由于m始终是一个正的标量，所以等式9-22告诉我们→ p和→v具有相同的方向。 根据公式9-22，动量的SI单位为千克/秒（kg·m / s）。 力和动量。 牛顿用动量表达了他的第二运动定律：

粒子动量的时间变化率等于作用在粒子上的净力，并且在该力的方向上。

以等式形式，这变成

换句话说，公式9-23表示粒子上的净外力→Fnet会改变粒子的线性动量→p。 相反，线性动量只能通过净外力来改变。 如果没有外力，→p不会改变。 正如我们将在模块9-5中看到的那样，这最后一个事实可以成为解决问题的强大工具。

通过用等式9-22中的→p代替来处理等式9-23，对于恒定质量m，

因此，关系→Fnet = d p→/ dt和→Fnet = ma→是粒子的牛顿第二运动定律的等价表达式。

粒子系统的线性动量

让我们将线性动量的定义扩展到一个粒子系统。 考虑一个由n个粒子组成的系统，每个粒子都有自己的质量，速度和线性动量。 粒子可能会相互影响，外力可能会作用在它们上。 整个系统的总线性动量→P，定义为单个粒子的线性动量的矢量和。 因此，

如果将该方程与方程9-17进行比较，我们会看到

这是定义粒子系统线性动量的另一种方法：

粒子系统的线性动量等于系统总质量M与质心速度的乘积。

力和动量。 如果我们采用公式9-25的时间导数（速度可以改变，但质量不能改变），我们发现

比较公式9-14和9-26，我们可以为等效形式的粒子系统写牛顿第二定律

其中→Fnet是作用在系统上的净外力。 该方程式是单粒子方程式→Fnet = d p→/ dt到多个粒子系统的推广。 换句话说，该方程式表示粒子系统上的净外力→Fnet会改变系统的线性动量→P。 相反，线性动量只能通过净外力来改变。 如果没有外力，→P将不会改变。 同样，这一事实为我们提供了解决问题的强大工具。

9-4 碰撞与冲量

除非净外力改变它，否则任何粒子状物体的动量→p都不会改变。 例如，我们可以推动身体以改变其动量。 更重要的是，我们可以安排身体与棒球棒相撞。 在这种碰撞（或碰撞）中，作用在身体上的外力短暂，幅度大，并突然改变了身体的动量。 碰撞在我们的世界中很普遍，但是在我们碰到它们之前，我们需要考虑一个简单的碰撞，在该碰撞中，运动的类粒子物体（弹丸）与其他物体（目标）碰撞。

单次碰撞

假设射弹为球，目标为蝙蝠。 碰撞是短暂的，并且球承受的力足以减慢，停止甚至颠倒其运动。 图9-8描绘了一个瞬间的碰撞。 球承受的力→F（t）在碰撞过程中会发生变化，并且会改变球的线性动量→p。 这种变化与牛顿第二定律的力有关，形式为→F = d p→/ dt。 通过重新排列第二定律表达式，我们看到在时间间隔dt中，球的动量变化为

如果将方程9-28的两边从碰撞前的时间ti到碰撞后的时间tf进行积分，我们可以发现由于碰撞而导致的球动量的净变化：

该方程式的左侧为我们提供了动量的变化：→pf-→pi =Δ→p。 右侧是碰撞力的大小和持续时间的量度，称为碰撞的冲量→J：

因此，物体动量的变化等于对物体的冲力：

该表达式也可以向量形式编写

并以以下形式

整合部队。 如果我们有一个→F（t）的函数，我们可以通过积分该函数来评估→J（从而改变动量）。 如果有→F对时间t的图，则可以通过找到曲线和t轴之间的面积来评估→J，如图9-9a所示。 在许多情况下，我们不知道力如何随时间变化，但是我们知道力的平均大小Favg和碰撞持续时间Δt（= tf-ti）。 然后我们可以将冲量的大小写为

如图9-9b所示，绘制了平均力与时间的关系曲线。 该曲线下的面积等于图9-9a中实际力F（t）的曲线下的面积，因为这两个面积都等于脉冲幅度J。 9-8。 牛顿的第三定律随时告诉我们，球棒上的力与球上的力大小相同，但方向相反。 根据公式9-30，这意味着球棒上的脉冲与球上的脉冲具有相同的大小，但方向相反。

一系列碰撞

现在，我们来考虑一下当它经历一系列相同的，重复的碰撞时施加在身体上的力。例如，作为一个恶作剧，我们可能会调整其中一架发射网球的机器，以直接在墙壁上快速发射它们。每次碰撞都会在墙壁上产生力，但这不是我们要寻找的力。我们希望在轰炸期间将平均力Favg施加在墙壁上，也就是说，在大量碰撞期间应将平均力Favg施加在墙壁上。在图9-10中，质量为m且线性动量为m v→的弹丸体的稳定流沿x轴移动并与固定在适当位置的目标体碰撞。设n为在时间间隔Δt内相撞的弹丸数。由于运动仅沿x轴进行，因此我们可以使用沿该轴的矩量分量。因此，每个弹丸具有初始动量mv，并且由于碰撞而经历线性动量的变化Δp。在间隔Δt内，n个弹丸的线性动量总变化为nΔp。在Δt期间对目标产生的脉冲→J沿x轴，并且具有相同的nΔp幅度，但方向相反。我们可以将这种关系以组件形式编写为

负号表示J和Δp的方向相反。 平均力。 通过重新排列公式9-35并替换公式9-36，我们发现在碰撞过程中作用在目标上的平均力Favg：

该方程式以n /Δt（弹丸与目标碰撞的速率）和Δv（那些弹丸的速度变化）的形式给出了Favg。 速度变化。 如果弹丸在撞击时停止，则在公式9-37中，我们可以用Δv代替，

其中vi（= v）和vf（= 0）分别是碰撞之前和之后的速度。 相反，如果弹丸从目标直接向后弹跳（反弹）而速度没有变化，则vf = -v，我们可以用

在时间间隔Δt中，质量Δm＝ nm的量与目标碰撞。 有了这个结果，我们可以将等式9-37重写为

该方程式给出了平均力Favg，以Δm/Δt表示，即质量与目标碰撞的速率。 同样，根据弹丸的作用，我们可以用公式9-38或9-39代替Δv。

9-5 线性动量守恒 2021年3月23日19点12分

假设作用在粒子系统上的净外力→Fnet（因此净冲量→J）为零（系统是孤立的），并且没有粒子离开或进入系统（系统是封闭的）。 在公式9-27中将→Fnet = 0得出d P→/ dt = 0，这意味着

换句话说，

如果没有净外力作用于粒子系统，则系统的总线性动量→P不会改变。

该结果称为线性动量守恒定律，是解决问题的极有力工具。 在家庭作业中，我们通常将法律写成

注意：动量不应与能量混淆。 在该模块的示例问题中，动量得以保留，但能量绝对不是。 方程式9-42和9-43是矢量方程式，因此，每个方程式等效于三个方程式，它们对应于在例如xyz坐标系中的三个相互垂直的方向上的线性动量守恒。 根据作用在系统上的力，线性动量可能在一个或两个方向上守恒，但并非在所有方向上都守恒。 然而，

如果封闭系统上的净外力分量沿某个轴为零，则该系统沿该轴的线性动量分量就不会改变。

在作业问题中，如何得知沿x轴的线性动量是否守恒？检查沿该轴的分力。如果任何此类分量的净值为零，则守恒适用。例如，假设您在房间里扔了一个柚子。在飞行过程中，作用在葡萄柚上的唯一外力（我们将其作为系统）是重力→F g，​​该力垂直向下指向。因此，葡萄柚的线性动量的垂直分量改变，但是由于没有水平外力作用在葡萄柚上，因此线性动量的水平分量不能改变。请注意，我们专注于作用在封闭系统上的外力。尽管内力可以改变系统各部分的线性动量，但它们不能改变整个系统的总线性动量。例如，身体各器官之间有许多作用力，但它们并不能（很感激）推动您穿过整个房间。此模块中的示例问题涉及一维爆炸（意味着爆炸前后的运动是沿单个轴）或二维（意味着它们在包含两个轴的平面中）。在以下模块中，我们考虑冲突。

9-6 碰撞中的动量和动能 2021年3月23日19点19分

碰撞中的动量和动能

在模块9-4中，我们考虑了两个类似粒子的物体的碰撞，但一次只关注其中一个物体。在接下来的几个模块中，我们假设系统是封闭且隔离的，因此我们将重点转移到系统本身。在模块9-5中，我们讨论了有关这样一个系统的规则：系统的总线性动量→P不能改变，因为没有净外力来改变它。这是一条非常强大的规则，因为它可以使我们在不知道碰撞细节（例如造成多大破坏）的情况下确定碰撞结果。我们还将对两个碰撞体系统的总动能感兴趣。如果碰撞恰好使该总数保持不变，则系统的动能将被守恒（碰撞前后，动能相同）。这种碰撞称为弹性碰撞。在常见物体的日常碰撞中，例如两辆汽车或一个球和一个蝙蝠，一些能量总是从动能转移到其他形式的能量，例如热能或声音能。因此，系统的动能不守恒。这种碰撞称为非弹性碰撞。

但是，在某些情况下，我们可以将常见物体的碰撞近似为弹性体。 假设您将超级球扔到坚硬的地板上。 如果球与地板（或地球）之间的碰撞是弹性的，则该球不会因碰撞而失去动能，并且会反弹到其原始高度。 然而，实际的回弹高度有些短，表明在碰撞中损失了至少一些动能，因此该碰撞有些无弹性。 不过，我们可能会选择忽略动能的微小损失，以使碰撞近似为弹性。 两个物体的非弹性碰撞总是涉及系统动能的损失。 如果物体粘在一起，则会造成最大的损失，在这种情况下，这种碰撞称为完全非弹性碰撞。 棒球和蝙蝠的碰撞是无弹性的。 但是，湿的油灰球与球棒的碰撞是完全没有弹性的，因为油灰会粘在球棒上。

一维非弹性碰撞

图9-14显示了两个物体发生一维碰撞之前和之后的情况。 显示了碰撞之前（下标i）和碰撞之后（下标f）的速度。 这两个主体构成了我们的系统，该系统是封闭且孤立的。 我们可以将两体系统的线性动量守恒定律写为

我们可以象征为

因为运动是一维的，所以我们可以放下矢量的开销箭头，并且仅使用沿轴的分量，并用符号指示方向。 因此，根据p = mv，我们可以将公式9-50重写为

如果我们知道质量，初始速度和其中一个最终速度的值，则可以使用公式9-51找到另一个最终速度。

一维完全无弹性碰撞

图9-15显示了两个物体完全无弹性碰撞之前和之后的碰撞（意味着它们粘在一起）。 质量为m2的物体刚开始处于静止状态（v2i = 0）。 我们可以将该物体称为目标，将传入物体称为弹丸。 碰撞后，卡在一起的物体以速度V移动。在这种情况下，我们可以将公式9-51重写为

如果我们知道例如射弹的质量和初始速度v1i的值，我们可以使用公式9-53找到最终速度V。 请注意，V必须小于v1i，因为质量比m1 /（m1 + m2）必须小于1。

质心速度

在封闭的隔离系统中，系统质心的速度→vcom不会因碰撞而改变，因为在隔离系统的情况下，没有净外力来改变它。 为了获得→vcom的表达式，让我们返回图9-14的两体系统和一维碰撞。 从公式9-25（→P = M→vcom），我们可以将→vcom与该双体系统的总线性动量→P关联起来，可写为

在碰撞过程中，总的线性动量→P保持不变； 因此它由公式9-50的任一边给出。 让我们用左侧写

用该表达式代入公式9-54中的→P并求解→vcom，我们得到

该方程式的右边是一个常数，并且→vcom在碰撞前后具有相同的常数值。

例如，图9-16在一系列冻结帧中显示了图9-15的完全非弹性碰撞的质心运动。 物体2是目标，方程9-56中的初始线性动量为→p2i = m2→v 2i =0。物体1为弹丸，方程9-56中的初始线性动量为→p1 i = m1v→ 1我 请注意，随着一系列冻结帧前进并随后超过碰撞，质心将以恒定的速度向右移动。 碰撞后，物体的共同最终速度V等于→v com，因为这样，质心就会与粘在一起的物体一起运动。

9-7 一维弹性碰撞 2021年3月23日19点38分

正如我们在模块9-6中讨论的那样，日常碰撞是非弹性的，但是我们可以将其中一些近似为弹性的；例如， 也就是说，我们可以估算出碰撞体的总动能是守恒的，不会传递给其他形式的能量：

这表示：

在弹性碰撞中，每个碰撞体的动能可能会改变，但系统的总动能不会改变。

例如，母球在撞球游戏中与目标球的碰撞可以近似地是弹性碰撞。 如果碰撞是正面的（母球直接朝向目标球），母球的动能几乎可以全部转移到目标球上。 （不过，碰撞会将一些能量转移到您听到的声音中。）

图9-18显示了两个物体在发生一维碰撞之前和之后的碰撞，例如池球之间的正面碰撞。 质量为m1的弹丸体和初始速度为v1i向最初处于静止状态（v2i = 0）的目标质量为m2的物体移动。 假设此两体系统是封闭且隔离的。 然后，系统的净线性动量是守恒的，根据等式9-51，我们可以将守恒写为

如果碰撞也是弹性的，则总动能是守恒的，我们可以将守恒写为

在这些方程式的每一个中，下标i标识物体的初始速度，下标f标识物体的最终速度。 如果我们知道物体的质量，并且我们也知道物体1的初始速度v1i，则唯一未知的量是两个物体的最终速度v1f和v2f。 使用两个方程式，我们应该能够找到这两个未知数。

在将公式9-66除以公式9-65并进行更多的代数运算后，我们得到

请注意，v2f始终为正（质量为m2的初始静止目标物体始终向前移动）。 从公式9-67中可以看出，v1f可能是两个符号（质量为m1的抛射体如果m1> m2会向前移动，而如果m1 <m2则会反弹）。

让我们看一些特殊情况。

相等的质量如果m1 = m2，则公式9-67和9-68简化为

我们可以称其为台球选手的结果。 它预测，在具有相等质量的物体发生正面碰撞后，物体1（最初移动）停止在其轨迹中死亡，而物体2（最初处于静止状态）以物体1的初始速度起飞。 质量相等的物体只是交换速度。 即使身体2最初不处于静止状态，也是如此。

庞大的目标在图9-18中，庞大的目标意味着m2⪢m1。 例如，我们可能向固定的炮弹发射高尔夫球。 然后将方程式9-67和9-68简化为

这告诉我们，主体1（高尔夫球）只是沿其进入路径反弹，其速度基本保持不变。 最初，静止物体2（炮弹）以低速向前移动，因为公式9-69中括号中的数量远小于1。 这就是我们应该期望的。

情况恰恰相反。 即m1⪢m2。 这次，我们向固定的高尔夫球发射炮弹。 公式9-67和9-68简化为

公式9-70告诉我们，物体1（炮弹）只是继续前进，几乎不会因碰撞而减速。 主体2（高尔夫球）以炮弹速度的两倍向前冲锋。 为什么速度翻倍？ 回想方程9-69中描述的碰撞，其中入射光体（高尔夫球）的速度从+ v变为-v，速度变化为2v。 在此示例中，速度也发生了相同的变化（但现在从零变为2v）。

现在我们已经检查了弹丸和静止目标的弹性碰撞，现在让我们检查两个物体在发生弹性碰撞之前都在运动的情况。

注意，将下标1和2分配给主体是任意的。 如果在图9-19以及公式9-75和9-76中交换这些下标，则最终得到的是相同的一组方程。 还要注意，如果我们将v2i设置为0，则物体2变为固定目标，如图9-18所示，并且公式9-75和9-76分别简化为公式9-67和9-68。

9-8 二维碰撞 2021年3月23日19点54分

当两个物体碰撞时，它们之间的冲动决定了它们随后行进的方向。 特别地，当碰撞不是正面碰撞时，车身不会最终沿其初始轴线行进。 对于封闭的隔离系统中的此类二维碰撞，总线性动量仍必须保持不变：

如果碰撞也是弹性的（特殊情况），那么总动能也将守恒：

如果我们根据xy坐标系上的分量来编写方程式9-77，则它通常对于分析二维碰撞更有用。 例如，图9-21显示了最初静止时弹体与目标体之间的掠射碰撞（不是正面碰撞）。 物体之间的脉冲使物体以相对于x轴的角度θ1和θ2离开，射弹最初沿着该x轴行进。 在这种情况下，我们将x轴上的分量的公式9-77重写为

公式9-79至9-81包含七个变量：两个质量m1和m2；两个质量m1和m2。 三种速度，v1i，v1f和v2f； 还有两个角度θ1和θ2。 如果我们知道这些量中的任何四个，就可以对其余三个量求解三个方程。

9-9 质量变化的系统：火箭 2021年3月23日19点57分

到目前为止，我们已经假设系统的总质量保持不变。 有时，就像在火箭中一样，并非如此。 火箭在其发射台上的大部分质量都是燃料，所有这些燃料最终都将被燃烧并从火箭发动机的喷嘴喷出。 当火箭加速时，我们通过应用牛顿第二定律来处理火箭质量的变化，这不仅适用于火箭，还适用于火箭及其喷射的燃烧产物。 该系统的质量不会随着火箭的加速而改变。

寻找加速度

假设我们相对于惯性参考系处于静止状态，看着火箭在没有重力或大气阻力的情况下通过深空加速。 对于这种一维运动，令M为火箭的质量，v为任意时间t的速度（见图9-22a）。 图9-22b显示了在dt之后的时间间隔中情况如何。 火箭现在具有速度v + dv和质量M + dM，其中质量dM的变化为负数。 相对于我们的惯性参考系，火箭在间隔dt内释放的排气产物的质量为-dM，速度为U。 保持动量。 我们的系统包括在间隔dt期间释放的火箭和废气产物。 系统是封闭和隔离的，因此在dt期间必须保持系统的线性动量。 那是，

下标i和f表示时间间隔dt的开始和结束时的值。 我们可以将公式9-82重写为

其中右边的第一项是在间隔dt期间释放的排气产物的线性动量，第二项是在间隔dt结束时火箭的线性动量。 使用相对速度。 我们可以通过使用火箭与排气产物之间的相对速度vrel来简化公式9-83，该速度与相对于车架的相对速度有关。

我们用-R代替dM / dt（火箭失去质量的速率），其中R是燃料消耗的（正）质量率，并且我们认识到dv / dt是火箭的加速度。 经过这些更改，公式9-86变为

公式9-87保留了任何给定瞬间的值。

请注意，公式9-87的左侧具有力的大小（kg / s·m / s = kg·m / s2 = N），并且仅取决于火箭发动机的设计特性，即取决于它的比率R 消耗了燃料质量，并消耗了质量相对于火箭的速度。 我们称此术语Rvrel为火箭发动机的推力，并用T表示。如果将方程9-87写为T = Ma，则牛顿第二定律出现，其中a是质量为M时火箭的加速度 。

找到速度

火箭在消耗燃料时的速度将如何变化？ 从公式9-85，我们得到

整合导致

其中Mi是火箭的初始质量，而Mf是火箭的最终质量。 然后求积分

是因为在质量从Mi变为Mf的过程中火箭的速度增加了。 （公式9-88中的“ ln”符号表示自然对数。）我们在这里看到了多级火箭的优势，其中，当燃料耗尽时，通过丢弃连续的级来降低Mf。 理想的火箭将只剩下其有效载荷才能到达目的地。